Dilute Ising Ferromagnets

日大理工　　松　平　　　升

（１０月１７日受理）

Ising 或は Heisenberg のスピン系で磁気スピンを非磁気的な不純物でおきかえてゆくと，１ケのスピンのまわりのスピン数が減少して，effective に次元数がさがり転移温度が降下する。この現象は理論的に以前から多くの解析がなされており，方法としては，

(1) 完全結晶に対する近似解をこの問題に適用する。

(2) 濃度展開

(3) 高温展開

(4) Green 関数の方法

などがある。ここでは，(1)の一種で，1968年に Mamada and Takano が行った計算を第０近似とし，逐次的に近似を改良する方法を見出したので，その一部を報告する。簡単のため，最近接相互作用スピン½ の２次元正方 Ising モデルについて説明する。これらの制限をとりはらうことは簡単である。スピン変数を $\sigma_j = \pm 1$, $K = \beta J$ とおき，次の恒等式[1)]

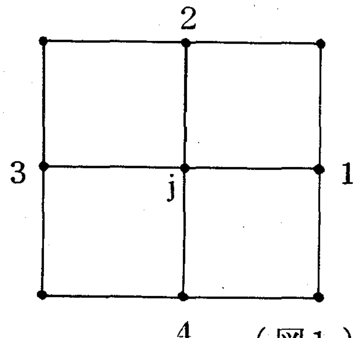
$$\begin{aligned} \langle \sigma_j W_j \rangle &= 0 \\ \langle \sigma_j \sigma_k W_j \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

から出発する。ここに

$$W_j = 1 - \sigma_j \tanh (K \Sigma \sigma_i) \tag{2}$$

で，和は σ_j の最近接スピンについて行う。不純物の分布は完全に random と仮定し，スピンの濃度を p と書く。

j－site のまわりの４ケ（第１図）の中 n ケがスピンで占められている確率は $p^n (1-p)^{4-n}$ であるから，



（図1）

$$\tanh(K\Sigma\sigma_i) = p(1-p)^2 \ \Sigma \ \tanh(K\sigma_i)$$
$$+ p^2(1-p)^2 \ \Sigma \ \tanh[K(\sigma_i+\sigma_k)]$$
$$+ p^3(1-p) \ \ \Sigma \ \tanh[K(\sigma_i+\sigma_k+\sigma_\ell)]$$
$$+ p^4 \ \tanh[K(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)]$$

となる。更に

$$\tanh(K\sigma_i) = \sigma_i \ \tanh K \equiv \sigma_i \ \alpha$$
$$\tanh[K(\sigma_i+\sigma_k)] = \frac{1}{2}(\sigma_i+\sigma_k) \ \tanh 2K \equiv \frac{1}{2}(\sigma_i+\sigma_k)\gamma$$
$$\tanh[K(\sigma_i+\sigma_k+\sigma_\ell)] = C(\sigma_i+\sigma_k+\sigma_\ell) + D\,\sigma_i\,\sigma_k\,\sigma_\ell$$
$$\tanh[K(\sigma_1+\cdots+\sigma_4)] = E\,\Sigma\,\sigma_i + F\,\Sigma\,\sigma_i\,\sigma_k\,\sigma_\ell$$
$$C = \frac{1}{4}(\tanh 3K + \alpha)$$
$$D = \frac{1}{4}(\tanh 3K - 3\alpha)$$
$$E = \frac{1}{8}(\tanh 4K + 2\gamma)$$
$$F = \frac{1}{8}(\tanh 4K - 2\gamma)$$

の恒等式を使うと，(2) 式は

$$W_j = 1 - \sigma_j \ [\Phi(p)\ \Sigma\,\sigma_i + \Psi(p)\ \Sigma\,\sigma_i\,\sigma_k\,\sigma_\ell]$$
$$\Phi(p) = p\left[(1-p)^3\alpha + \frac{3}{2}p(1-p)^2\gamma + 3p^2(1-p)\,c + p^3 E\right]$$
$$\Psi(p) = p^3[(1-p)\,D + p\,F]$$

と整理される。$\langle\sigma_j\rangle \equiv R$ とおき，(1) に代入して

$$R = 4\Phi(p)R + 4\Psi(p)\langle\sigma_1\sigma_2\sigma_3\rangle \qquad (3)$$

$$\langle\sigma_j\sigma_k\rangle = \Phi(p)\sum\langle\sigma_i\sigma_k\rangle + \Psi(p)\sum\langle\sigma_i\sigma_\ell\sigma_m\sigma_k\rangle$$

となる。ここ迄は近似を含まない。(3) の第一式で相関を無視すると $T = T_c(p)$ で

$$1 = 4\Phi(p)$$

であるが，これはMamada－Takano[2] に一致する。これを第0近似とすると，第一近似は

$$\langle\sigma_1\sigma_2\sigma_3\rangle = R^3 + R\left[\langle\sigma_1\sigma_2\rangle_c + \langle\sigma_1\sigma_3\rangle_c + \langle\sigma_2\sigma_3\rangle_c\right] + \langle\sigma_1\sigma_2\sigma_3\rangle_c$$

に於て3体相関 $\langle\sigma_1\sigma_2\sigma_3\rangle$ を無視し，2体相関は (3) の第2式を用い，右辺に現れる4体相関 $\langle\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\rangle_c$ などを無視することで得られる。云いかえれば (3) をRと2体相関々数の関係式と近似すると，逐次的に遠くの2体相関をとり入れることが出来る。$p = 1$ で完全結晶の転移温度が得られ，$T_c = 0$ で臨界濃度 p_i が求められる。結果を第一表に示す。又，$T_c = T_c(p)$ のグラフは第2図に示す。p_c の近くで $T_c = A/\ln(p - p_c)$ と立ちあがる。

この近似では当然のことながら帯磁率の γ は1であり比熱は $T_C(p>p_C)$ 有限である。濃度の変

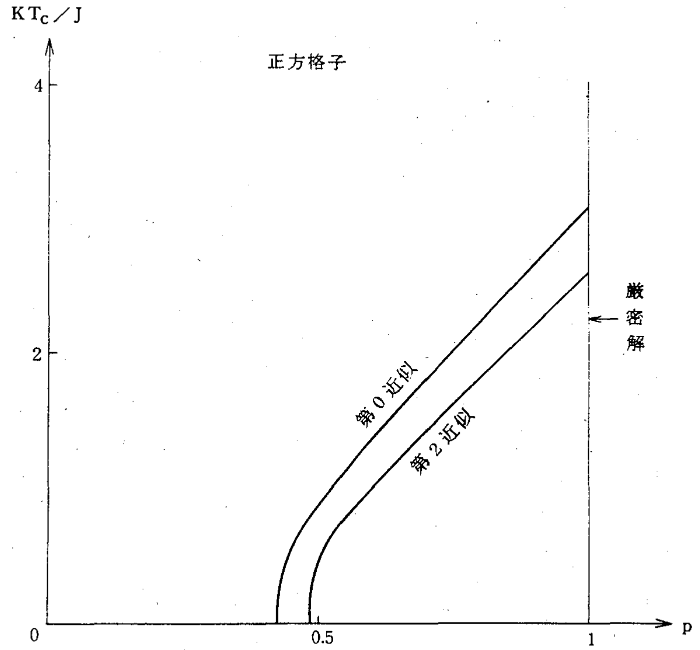


Fig. 2

第 一 表

格 子		第0近似	第1近似	第2近似	正確解[3]
SQ	T_c	3.09	2.82	2.60	2.27
	p_c	0.428	0.459	0.484	0.581
SC	T_c	5.07	4.84	4.77	4.51
	p_c	0.293	0.305	0.309	0.308
BCC	T_c	7.06	5.80		6.35
	p_c	0.223	0.230		0.243

T_c は kT_c/J の値

SQ ＝ 2次元正方格子

S_c ＝ 単純立方格子

BCC ＝ 体心立方格子

化によって有効次元が連続的に変化するので臨界指数 γ , α などがどう変化するかが最も興味ある問題であるが，今後の課題としたい。

参 考 文 献

1) M. Suzuki Phys Letters 19 (1965) 267

2) H. Mamada and F. Takano J. Phys. Soc. Japan 25 (1958) 675

3) T_c の3次元は高温展開による値

p_c は，M.F. Sykes and J.W. Essam Phys. Rev A 133 (1964) 310 による。